

Задачи к зачету по курсу
"Теория случайных процессов"

1. Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

2. Случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где ω - неслучайная константа, A и φ независимы, $\mathbf{M}(A) = m$, $\mathbf{D}(A) = \sigma^2$, φ -равномерно распределена на отрезке $[0, \pi]$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

3. Пусть $W(t)$ -стандартный винеровский процесс. Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не является дифференцируемым в среднем квадратическом.

4. $\xi(t)$ -пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

5. Пусть $W(t)$ -стандартный винеровский процесс. $\xi_1 = \int_0^\pi \cos(t) dW(t)$, $\xi_2 = \int_0^\pi \sin(t) dW(t)$. Найти: $M(\xi_1)$, $M(\xi_2)$, $D(\xi_1)$, $D(\xi_2)$, $Cov(\xi_1, \xi_2)$.

6. Корреляционная функция стационарного процесса равна $R(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$. Обратно, дана спектральная плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$, найти $K(\tau)$.

7. Пусть $W(t)$ -стандартный винеровский процесс, $h(\tau) = \exp(-\tau)$, $\tau > 0$, $\xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) W(s) ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для такого процесса. То же самое для процесса $\eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) dW(s)$.

8. Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = -\xi(t)dt + d\eta(t), \quad t \geq 0.$$

Найти общий вид решения этого уравнения.

9. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$. Доказать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадратическом и найти корреляционную функцию для производной.

10. При движении по некоторому лабиринту Вы в первый раз равновероятно сворачиваете либо налево, либо направо. Далее на каждой развилке Вы с вероятностью 0.7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0.3

в противоположную сторону. Какова вероятность того, что вы свернете налево

а) на третьей развилке,

б) на 1000-ой развилке?

11. Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.